



УДК 681.51

© 2021 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук,  
**Л.В. Никифорова**, канд. техн. наук,  
(Амурский государственный университет, Благовещенск),  
**Е.А. Шеленок**, канд. техн. наук  
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск)

## СИСТЕМА ПЕРИОДИЧЕСКОГО РОБАСТНО-АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ С ВХОДНЫМИ НАСЫЩЕНИЯМИ\*

Статья посвящена решению задачи синтеза комбинированных алгоритмов системы децентрализованного нелинейного периодического управления двухзвенным роботом-манипулятором, содержащим ограничения управляющих воздействий и предназначенным для выполнения циклически повторяющихся операций. В качестве методов решения поставленной в работе задачи используются критерий гиперустойчивости, условия  $L$ -диссипативности и быстродействующие фильтры-корректоры. С помощью имитационного моделирования иллюстрируется качество функционирования предложенной системы управления.

**Ключевые слова:** нелинейное периодическое управление, априорная параметрическая неопределенность, механическая система, критерий гиперустойчивости,  $L$ -диссипативность, фильтр-корректор, неявная эталонная модель, генератор периодических сигналов.

DOI: 10.22250/isu.2021.69.97-111

### Введение

Актуальность задач проектирования и разработки систем управления различными манипуляционными роботами обусловлена прежде всего их весьма широким применением. Эти устройства используются в металлургической промышленности, авиа- и автомобилестроительной индустрии, хи-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00712).

мическом производстве, в военной промышленности, медицине и других сферах [1 – 4]. Как правило, роль манипуляторов сводится к выполнению большого числа циклически повторяющихся технологических операций, а задачи разработки систем управления роботами заключаются в обеспечении высокой точности слежения за заданной траекторией движения. Причем на практике желаемое перемещение зачастую имеет сложную форму, что характерно для задач автоматической дуговой сварки сложных соединений, лазерной, плазменной или термической резки металлов, склейки различных составных изделий и др. С этой точки зрения построение систем управления манипуляторами осуществляется с использованием метода так называемого периодического управления (repetitive control) [5 – 8].

Манипуляционные роботы как объекты управления представляют собой многомерные (многосвязные) системы с множеством входных и выходных сигналов (каждый входной и выходной сигнал соответствует отдельной степени свободы устройства). В ряде работ, посвященных разработке систем управления сложными многосвязными динамическими объектами, предлагается использовать принцип децентрализованного управления [9 – 11].

В процессе работы системы управления некоторые параметры, входящие в состав математических уравнений, описывающих динамические свойства робота-манипулятора, могут изменяться, – например, из-за износа его составных частей или воздействия внешней среды. Подобные параметрические изменения могут привести к снижению производительности системы или в некоторых случаях к потере ее работоспособности, поэтому разработку алгоритмов управления всегда следует проводить с учетом уровня (или класса) априорной неопределенности параметров управляемого объекта. Кроме того, на практике работа объектов управления (в том числе роботов-манипуляторов) протекает в условиях постоянного действия внешних возмущений, которые также нужно учитывать с целью снижения их негативного влияния на процесс функционирования системы управления. Еще одной особенностью манипуляторов является наличие у них входного насыщения, обусловленного ограничением уровней сигналов, подаваемых на исполнительные механизмы. Подобная необходимость возникает в ситуациях, когда перемещения звеньев манипулятора осуществляются в замкнутом пространстве и, следовательно, амплитуда управляющих моментов должна иметь заданные пределы, исключающие нежелательные смещения элементов робота. Учет входных ограничений при разработке систем управления является очень важным требованием, поскольку в системах, спроектированных без учета входного насыщения, в ряде случаев может наблюдаться ухудшение

качества их функционирования или вовсе потеря работоспособности [12].

В частности, в работах [13 – 15] для одноканальных объектов с насыщением в предположении полного измерения вектора состояния и отсутствия внешних помех были предложены различные схемы адаптивного управления в схеме с эталонной моделью. Главная особенность разработанных систем – наличие в регуляторе переключателя, отвечающего за изменение скорости настройки адаптивных коэффициентов регулятора, что позволяет частично или полностью скомпенсировать входное насыщение. Данный подход развит в работах [16, 17], где с помощью критерия гиперустойчивости были получены модификации схем адаптивного и робастного управления линейными и нелинейными динамическими объектами с ограничениями входных сигналов.

В настоящей статье, с использованием полученных в [16 – 22] результатов, решается задача построения децентрализованной системы комбинированного нелинейного периодического управления двухзвенным роботоманипулятором математическая модель которого содержит ограничение входных воздействий.

### Модель манипулятора и описание системы управления

Динамические свойства манипуляционного робота, состоящего из  $n$  звеньев и имеющего входное насыщение, согласно [4], описываются в виде

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + f_{dis} = S(\tau), \quad (1)$$

где  $q \in \mathbf{R}^n$  – вектор координат (угловых перемещений) звеньев робота;  $\tau \in \mathbf{R}^n$  – вектор управляющих моментов приводов каждого звена;  $M(q) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  – положительно определенная матрица инерции;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  – матрица, описывающая действие центробежных и кориолисовых сил;  $G(q) \in \mathbf{R}^n$  – вектор, определяющий влияние гравитационных сил;  $f_{dis} \in \mathbf{R}^n$  – вектор внешних ограниченных периодических возмущений;  $S(\tau)$  – нелинейная функция насыщения входного сигнала  $\tau$ , описываемая в виде:

$$S(\tau) = \begin{cases} S_0, & \tau > S_0, \\ \tau, & |\tau| \leq S_0, \\ -S_0, & \tau < -S_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $S_0 > 0$  – известная константа, соответствующая уровню ограничения.

Рассматривая динамические свойства манипуляционного робота, включающего две степени свободы, опишем его динамику в соответствии с [4] и уравнением (1), с помощью следующей модели:

$$\begin{bmatrix} S(\tau_1) \\ S(\tau_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{dis,1} \\ f_{dis,2} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

в которой элементы матриц сил инерции и кориолисовых сил имеют вид

$$\begin{aligned} M_{11} &= p_1 + p_2 + 2p_3 \cos(q_2), \quad M_{12} = p_2 + p_3 \cos(q_2), \\ M_{21} &= p_2 + p_3 \cos(q_2), \quad M_{22} = p_2, \\ C_{11} &= -p_3 \dot{q}_2 \sin(q_2), \quad C_{12} = -p_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2), \\ C_{21} &= p_3 \dot{q}_1 \sin(q_2), \quad C_{22} = 0, \\ G_1 &= p_4 g \cos(q_1) + p_5 g \cos(q_1 + q_2), \quad G_2 = p_5 g \cos(q_1 + q_2), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \quad p_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad p_3 = m_2 l_1 l_{c2}, \\ p_4 &= m_1 l_{c2} + m_2 l_1, \quad p_5 = m_2 l_{c2}. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (3) – (5) введены следующие обозначения:  $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ ,  $i = 1, 2$  – угловые перемещения, рад; скорости, рад/с и ускорения каждого, рад/с<sup>2</sup>;  $m_i$  – масса первого и второго звена манипулятора, кг;  $l_i$  – длина  $i$ -го звена, м;  $I_i$  – момент инерции каждого звена, кг·м<sup>2</sup>;  $l_{ci}$  – расстояние  $(i - 1)$ -го соединения до центра масс  $i$ -го звена, м.

Представим математическое описание исследуемой системы в форме *вход-состояния-выход*, рассматривая робот-манипулятор как многомерный динамический объект управления, где каждому звену манипулятора соответствует отдельная локальная подсистема:

$$\frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{A}_i(t, \mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{b}_i S_i(u_i(t)) + \mathbf{f}_i(t) + \mathbf{b}_i \sum_{j=1}^2 \lambda_{ji}(t, \mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)), \quad (6)$$

$$y_i(t) = \mathbf{L}^T \mathbf{x}_i(t) = x_{1i}(t), \quad i \neq j,$$

где  $\tau_i = u_i$ ,  $q_i = x_i$ ,  $\dot{q}_i = \dot{x}_i$ ,  $\ddot{q}_i = \ddot{x}_i$ ,  $f_{dis,i} = f_i$ ;  $\mathbf{x}_i(t) = [x_{1i}(t), x_{2i}(t), x_{3i}(t)]^T$  – вектор переменных состояния локальных подсистем;  $u_i(t) \in \mathbf{R}$  – локальные управляющие сигналы;  $y_i(t) \in \mathbf{R}$  – угловые перемещения звеньев робота (выход  $i$ -й локальной подсистемы);  $\mathbf{A}_i(t, \mathbf{x}_i(t)) = \mathbf{A}_{1i}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{A}_{2i}(\mathbf{x}_i(t))$  – нелинейная вектор-функция;  $\mathbf{A}_{1i}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}_{1i} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}_i \boldsymbol{\alpha}_i^T(x_1(t), x_2(t)) \mathbf{x}_i(t)$  – матрица, элементы которой – нелинейные функции;  $\mathbf{A}_{1i}$  – некоторая стационарная матрица;  $\mathbf{A}_{2i}(\mathbf{x}_i(t)) = \mathbf{b}_i \beta_i(\mathbf{x}_i(t))$  – некоторый нелинейный вектор;  $\boldsymbol{\alpha}_i^T(x_1(t), x_2(t))$  и  $\beta_i(\mathbf{x}_i(t))$  – векторная и скалярная нелинейные функции соответственно;  $\mathbf{b}_i = [0, 0, 1]^T$  и  $\mathbf{L}^T = [1, 0, 0]$  – известные стационарные векторы;  $\lambda_{ji}(t, \mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$  – нелинейные функции, характеризующие динамическую взаимосвязь звеньев манипулятора;  $\mathbf{f}_i(t)$  – вектор внешних постоянно

действующих помех, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{f}_i^T(t) = \mathbf{b}_i^T f_{3i}(t) = [0, 0, f_{3i}(t)]. \quad (7)$$

В соответствии с (3) – (5) нелинейные функции, входящие в состав модели (6), (7), имеют вид:

для первой степени подвижности

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1^T(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) &= [\alpha_{11}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)), \alpha_{21}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)), \alpha_{31}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))], \\ \alpha_{11}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) &= 0, \alpha_{21}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = p_3 \dot{x}_{12}(t) \sin(x_{12}(t)), \\ \alpha_{31}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) &= 2p_3 \cos(x_{12}(t)), \beta(\mathbf{x}_1(t)) = p_4 g \cos(x_{11}(t)); \end{aligned} \quad (8)$$

для второй степени подвижности

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_2^T(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) &= [\alpha_{12}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)), \alpha_{22}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)), \alpha_{32}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))], \\ \alpha_{11}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) &= 0, \alpha_{21}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = 0, \\ \alpha_{31}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) &= 0, \beta(\mathbf{x}_1(t)) = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

динамические нелинейные перекрестные связи

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(t, \mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) &= (p_2 + p_3 \cos(x_{12}(t)))x_{32}(t) - \\ &\quad - (p_3(x_{21}(t) + x_{22}(t))\sin(x_{12}(t)))x_{22}(t) + \\ &\quad + p_5 g \cos(x_{11}(t) + x_{12}(t)), \\ \lambda_{21}(t, \mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) &= (p_2 + p_3 \cos(x_{12}(t)))x_{31}(t) + \\ &\quad + (p_3 x_{21}(t) \sin(x_{12}(t)))x_{21}(t) + \\ &\quad + p_5 g \cos(x_{11}(t) + x_{12}(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Для удобства дальнейших рассуждений перепишем модель (6) – (10) рассматриваемого манипулятора в эквивалентной форме *вход-выход*:

$$y_i(t) = W_i(p) \left\{ S_i(u_i(t)) + f_{3i}(t) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right\}; \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \quad (11)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования;  $y_i(t)$  – выходы локальных подсистем;  $W_i(p)$  – передаточные функции линейных частей локальных подсистем объекта управления;  $f_{3i}(t)$  – сигналы локальных возмущений объекта;

$F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) = \boldsymbol{\alpha}_i^T(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))\mathbf{x}_i(t) + \beta_i(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^2 \lambda_{ji}(t, \mathbf{x}_i(t))$  – скалярные функции, описывающие внутренние нелинейные зависимости и перекрестные связи.

Установим, что для модели робота (11) выполняются условия:

1) нелинейные зависимости и внешние возмущения удовлетворяют неравенствам

$$|f_{3i}(t)| \leq f_{0i} = \text{const}, \left| F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right| \leq F_{0i} = \text{const}, \forall \mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t) \neq 0, i \neq j,$$

где  $f_{0i}$  и  $F_{0i}$  – неизвестные числа;

2) параметры  $f_{3i}(t)$  и  $F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$  являются априорно неизвестными величинами  $f_{3i}(t) = f_{\xi_{3i}}(t)$ ,  $F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) = F_{\xi_i}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$ , где  $\xi$  – неизвестный набор параметров, принадлежащих известному ограниченному числовому множеству  $\Xi$ ;

3) передаточные функции локальных подсистем объекта (11) описываются в виде  $W_i(p) = \frac{1}{a_i(p)}$ ,  $a_i(p) = p^3 + a_{1i}p^2 + a_{2i}p + a_{3i}$ ,  $i = 1, 2$ , где  $a_i(p)$  – нормированный полином с неизвестными коэффициентами и произвольным расположением корней;

4) для непосредственного измерения доступны только выходные сигналы локальных подсистем  $y_i(t)$ .

С учетом особенностей рассматриваемого объекта пропустим измеряемые сигналы локальных подсистем  $y_i(t)$  через так называемые *выходные фильтры-корректоры (ВФК)* [20]

$$y_{Fi}(t) = W_{Fi}(p)y_i(t) = \left( \frac{T_i p + 1}{T_i^* p + 1} \right)^2 y_i(t), i = 1, 2, \quad (12)$$

где  $y_{Fi}(t)$  и  $y_i(t)$  – соответственно выходные и входные сигналы;  $W_{Fi}(p)$  – передаточные функции фильтров-корректоров;  $T_i, T_i^*$  – постоянные времени фильтра, причем значение  $T_i^*$  мало. В этом случае модель последовательного соединения объекта управления (11) и фильтра-корректора (11) в форме *вход-выход* будет иметь вид

$$\begin{aligned} y_{Fi}(t) &= W_{Fi}(p) \cdot W_i(p) \left\{ S_i(u_i(t)) + f_{3i}(t) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right\} = \\ &= \left( \frac{T_i p + 1}{T_i^* p + 1} \right)^2 \frac{1}{a_i(p)} \left\{ S_i(u_i(t)) + f_{3i}(t) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right\} = \\ &= \frac{\tilde{b}_i(p)}{\tilde{a}_i(p)} \left\{ S_i(u_i(t)) + f_{3i}(t) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right\} = \\ &= \tilde{W}_i(p) \left\{ S_i(u_i(t)) + f_{3i}(t) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{b}_i(p) = (T_i p + 1)^2, \tilde{a}_i(p) = a_i(p) \cdot (T_i^* p + 1)^2, i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Реальному произведению передаточных функций  $\tilde{W}_i(p) = W_{Fi}(p)W_i(p)$

всегда можно поставить в соответствие их «виртуальное» произведение

$$\tilde{W}_i(p) = \frac{b_i(p)}{a_i(p)} \cdot \left( \frac{T_i p + 1}{T_i^* p + 1} \right)^2 = \frac{\tilde{b}_i(p)}{a_i(p)} \cdot \frac{1}{(T_i^* p + 1)^2} = \hat{W}_i(p) \cdot \frac{1}{(T_i^* p + 1)^2},$$

$$i = 1, 2.$$

В этом случае, как показано, например в [22], за счет выбора малых значений параметров  $T_i^*$  и как следствие существования соотношений  $\frac{1}{(T_i^* p + 1)^2} \cong 1$ ,

допустимо заменить (13) на следующую приближенную модель:

$$y_{Fi}(t) \cong \frac{\tilde{b}_i(p)}{a_i(p)} y_i(t) = \hat{W}_i(p) \left\{ S_i(u_i(t)) + f_{3i}(t) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right\}, \quad (14)$$

$$\tilde{b}_i(p) = T_i^2 p^2 + 2T_i p + 1, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Выполняя эквивалентные преобразования модели (14), записанной в форме *вход-выход*, представим ее в форме *вход-состояние-выход*:

$$\frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{N}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}_i \left\{ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i(t) + S_i(u_i(t)) + f_{3i}(t) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \right\}, \quad (15)$$

$$y_{Fi}(t) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(t), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad t \geq t_0 = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

где  $\mathbf{x}_i^T(t) = [x_{1i}(t), x_{2i}(t), x_{3i}(t)]^T$  – векторы переменных состояния локальных подсистем;  $\mathbf{N}_i \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  – нильпотентные (верхне-сдвиговые) матрицы;  $\mathbf{b} = [0, 0, 1]^T$ ;  $\mathbf{a}_i^T = [a_{3i}, a_{2i}, a_{1i}]$  и  $\mathbf{c}_i^T = [\tilde{b}_{2i}, \tilde{b}_{1i}, \tilde{b}_{0i}] = [1, 2T_i, T_i^2]$  – векторы с соответствующими коэффициентами.

### Цели управления

Определим *основную цель управления* как высокоточное слежение выходов локальных подсистем  $y_i(t)$  объекта управления за периодическими командными сигналами  $r_i(t) = r_i(t + T)$ , определяющими требуемое перемещение каждого звена робота:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |r_i(t) - y_i(t)| \leq \Delta_{ri}, \quad \Delta_{ri} = const, \quad (16)$$

где  $\Delta_{ri}$  – малые относительно соответствующих максимальных значений задающих сигналов величины (требуемая точность слежения).

Если теперь требуемую динамику выходов основных локальных контуров управления  $y_{Fi}(t)$  (выходов локальных ВФК (10)) по аналогии с [21, 22] сформировать за счет использования *задающих фильтров-корректоров (ЗФК)*:

$$\tilde{r}_i(t) = W_{Fi}(p)r_i(t) = \left( \frac{T_i p + 1}{T_i^* p + 1} \right)^2 r_i(t), \quad (17)$$

где  $r_i(t)$  – некоторые дополнительные командные сигналы то для рассматриваемого динамического объекта можно сформулировать *дополнительную цель управления*: требуется синтезировать явный вид закона управления

$$u_i(t) = u_i(y_{Fi}(t), \tilde{r}_i(t)), \quad (18)$$

обеспечивающего выполнение целей

$$\left| y_i^*(t) - y_{Fi}(t) \right| \cong \left| \hat{r}_i(t) - y_{Fi}(t) \right| \leq \tilde{\Delta}_{ri}, \quad \tilde{\Delta}_{ri} = const, \quad (19)$$

где  $\hat{\Delta}_{ri}$  – малая величина;  $y_i^*(t)$  – выходы локальных *неявных эталонных моделей (НЭМ)*, заданных соотношениями

$$y_i^*(t) = \frac{1}{\chi_{*i}^{-1} p + 1} \tilde{r}_i(t) = \frac{\chi_{*i}}{p + \chi_{*i}} \tilde{r}_i(t), \quad \chi_{*i} = const > 0, \quad (20)$$

которые [21, 22] при  $\chi_{*i} \gg 0$  допустимо представить в виде  $y_i^*(t) \cong \hat{r}_i(t)$ . При этом при решении задачи синтеза закона управления (18) вместо математической модели *НЭМ* (20) будем использовать ее эквивалентный аналог

$$y_i^*(t) = \frac{\chi_{*i} \tilde{b}_i(p) \tilde{b}_{1i}}{(p + \chi_{*i}) \tilde{b}_i(p) \tilde{b}_{1i}} \tilde{r}_i(t) = \frac{\hat{\chi}_{*i} \tilde{b}_i(p) \tilde{b}_{1i}^{-1}}{(p + \chi_{*i}) \tilde{b}_i(p)} \tilde{r}_i(t), \quad \hat{\chi}_{*i} = \chi_{*i} \tilde{b}_{1i},$$

который в форме *вход-состояние-выход* примет вид:

$$\frac{d\mathbf{x}_i^*(t)}{dt} = \mathbf{A}_i^* \mathbf{x}_i^*(t) + \mathbf{b}_i \hat{\chi}_{*i} \tilde{r}_i(t), \quad y_i^*(t) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i^*(t), \quad \mathbf{x}_i^*(t_0) = 0, \quad t \geq t_0 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

где  $\mathbf{x}_i^*(t) = [x_{1i}^*(t), x_{2i}^*(t), x_{3i}^*(t)]^T$ ;  $\mathbf{A}_i^* = \mathbf{N}_i + \mathbf{b}_i \mathbf{a}_{*i}^T = \mathbf{N}_i + \mathbf{b}_i (\mathbf{a}_i - \chi_{*i} \mathbf{c}_i)^T \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ ;

$\chi_{*i}, \hat{\chi}_{*i} = const \gg 0$ ;  $\mathbf{a}_{*i}^T = [a_{*3i}, a_{*2i}, a_{*1i}] = [a_{3i} - \chi_{*i} \tilde{b}_{2i}, a_{2i} - \chi_{*i} \tilde{b}_{1i}, a_{1i} - \chi_{*i} \tilde{b}_{0i}]$ .

### Синтез алгоритмов управления

Для разработки закона управления (18) воспользуемся критерием гиперустойчивости В.М. Попова. Рассмотрим вектор отклонений переменных состояния *НЭМ* (21) и объекта управления с *ВФК* (15)  $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i^*(t) - \mathbf{x}_i(t)$  и запишем эквивалентную математическую модель рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_i(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{*i} \mathbf{e}_i(t) + \mathbf{b}_i \mu_i(t), \quad v(t) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{e}_i(t) = y_i^*(t) - y_{Fi}(t) = \hat{r}_i(t) - y_{Fi}(t), \\ \mu_i(t) &= \hat{\chi}_{*i} \tilde{r}_i(t) - \chi_{*i} y_{Fi}(t) - u_i(t) - [S_i(u_i(t)) - u_i(t)] - \\ &\quad - f_{3i}(t) - F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)), \end{aligned} \quad (22)$$



где  $v_i(t)$  и  $\mu_i(t)$  – соответственно видоизмененные сигналы выходов и сигналы управляющих воздействий.

Для эквивалентной системы (22) необходимо выполнить два условия:

$$\operatorname{Re} \left[ \mathbf{c}_i \left( j\omega \mathbf{E}_i - \mathbf{A}_i^* \right)^{-1} \mathbf{b}_i \right] > 0, \forall \omega \geq 0; \quad (23)$$

$$\eta_i(0, t) = -\int_0^t \mu_i(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta \geq -\eta_{0i}, \eta_{0i} = \text{const}, \forall t > 0, i = 1, 2, \quad (24)$$

где  $\mathbf{E}_i$  – единичные матрицы соответствующего размера.

Справедливость требования (23) в рассматриваемом случае является очевидной, поскольку передаточная функция линейной части системы (22) имеет вид

$$W_i(s) = \mathbf{c}_i \left( s\mathbf{E}_i - \mathbf{A}_i^* \right)^{-1} \mathbf{b}_i = \frac{1}{\chi_{*i}^{-1}s + 1},$$

где  $s$  – комплексная переменная. Определим условия, гарантирующие выполнение интегральных неравенств (24). Учитывая вид сигналов  $\mu_i(t)$  из (22),

а также определив сигнал управления как  $u_i(t) = \sum_{d=1}^3 u_{di}(t)$ , перепишем левые

части неравенства (24) в виде

$$\begin{aligned} \eta_i(0, t) = & \left( \int_0^t u_{i1}(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta - \int_0^t \theta_i(\zeta) v(\zeta) d\zeta \right) + \\ & + \left( \int_0^t u_{i2}(\zeta) v_2(\zeta) d\zeta + \chi_{*i} \int_0^t y_{Fi}(\zeta) v(\zeta) d\zeta \right) + \\ & + \left( \int_0^t u_{i3}(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta + \int_0^t F_i(\mathbf{x}_i(\zeta), \mathbf{x}_j(\zeta)) v(\zeta) d\zeta \right) + \\ & + \int_0^t [S_i(u_i(\zeta)) - u_i(\zeta)] v_i(\zeta) d\zeta = \\ & = \sum_{d=1}^3 \eta_{di}(0, t) + \int_0^t [S_i(u_i(\zeta)) - u_i(\zeta)] v_i(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\theta_i(t) = \hat{\chi}_{*i} \tilde{r}_i(t) + f_{3i}(t)$  – периодический сигнал.

Синтезируем составляющую  $u_{1i}(t)$  в следующем периодическом виде:

$$u_{1i}(t) = u_{1i}(t - T) + \gamma_{1i} v_i(t) \tilde{\mathcal{G}}_i(t), u_{1i}(h) = 0, h \in [-T, 0], \quad (26)$$

где  $\gamma_{1i} = \text{const} > 0$ ;  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t)$  – выходы динамических переключателей

$$\tilde{\tau}_i \frac{d\tilde{\mathcal{G}}_i(t)}{dt} + \tilde{\mathcal{G}}_i(t) = \mathcal{G}_i(t), \tilde{\mathcal{G}}_i(0) = 0, \quad (27)$$

$$\mathcal{G}_i(t) = \begin{cases} 1, & \forall [S_i(u_i(t)) - u_i(t)]v_i(t) \geq 0, \\ \mathcal{G}_{0i}, & \forall [S_i(u_i(t)) - u_i(t)]v_i(t) < 0, \end{cases}$$

$\tilde{\tau}_i$  – постоянные времени динамических переключателей;  $\mathcal{G}_i(t)$  – функции переключения;  $0 < \mathcal{G}_{0i} < 1$  – масштабирующие коэффициенты. Тогда согласно результатам [18, 19], с учетом  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t) \geq \mathcal{G}_{0i}$ , для интегрального слагаемого  $\eta_{1i}(0, t)$  будет иметь место следующая оценка:

$$\eta_{1i}(0, t) \geq \gamma_{1i} \mathcal{G}_{0i} \int_0^t v_i(\zeta) \left[ \int_0^\zeta \omega_{0i}(\zeta - h) v_i(h) dh - \theta_i(\zeta) \right] d\zeta \geq -\eta_{01}^2, \quad \forall t > 0,$$

где  $\eta_{01} = const$ ;  $\omega_{0i}(\cdot)$  – весовые функции генераторов периодических сигналов, которым соответствуют передаточные функции  $W_i(s) = 1/(1 - \exp(-sT))$ .

Если явный вид  $u_{2i}(t)$  синтезировать как

$$u_{2i}(t) = \gamma_{21i} y_{Fi}(t) \int_0^t y_{Fi}(\zeta) v_i(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta + \gamma_{22i} y_{Fi}^2(t) v_i(t) \tilde{\mathcal{G}}_i(t), \quad (28)$$

$$h_{21i} = const > 0, \quad h_{22i} = const > 0,$$

то для интеграла  $\eta_{2i}(0, t)$  будем иметь следующую справедливую оценку:

$$\begin{aligned} \eta_{2i}(0, t) &= \gamma_{21i} \int_0^t y_{Fi}(\zeta) v_i(\zeta) \int_0^\zeta y_{Fi}(\zeta) v_i(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta d\zeta + \\ &+ \gamma_{22i} \int_0^t y_{Fi}^2(\zeta) v_i^2(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta + \chi_{*i} \int_0^t y_{Fi}(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta \geq \\ &\geq \frac{\gamma_{21i} \mathcal{G}_{0i}}{2} \left( \int_0^t y_{Fi}(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta \right)^2 + \chi_{*i} \int_0^t y_{Fi}(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta \pm \frac{\chi_{*i}^2}{2\gamma_{21i} \mathcal{G}_{0i}} \geq \\ &\geq -\frac{\chi_{*i}^2}{2\gamma_{21i} \mathcal{G}_{0i}} = -\eta_{02i}^2, \quad \eta_{02i} = const, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Составляющую  $u_{3i}(t)$  закона управления (18) синтезируем в виде

$$u_{3i}(t) = \gamma_{31i} \int_0^t v_i(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta + \gamma_{32i} v_i(t) \tilde{\mathcal{G}}_i(t), \quad (29)$$

$$\gamma_{31i} = const > 0, \quad \gamma_{32i} = const > 0$$

и оценим интегральное слагаемое  $\eta_{3i}(0, t)$  как

$$\begin{aligned} \eta_{3i}(0, t) &= \gamma_{31i} \int_0^t v_i(\zeta) \int_0^\zeta v_i(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta d\zeta + \gamma_{32i} \int_0^t v_i^2(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta + \\ &+ \int_0^t F_i(\mathbf{x}_i(\zeta), \mathbf{x}_j(\zeta)) v_i(\zeta) d\zeta \pm F_{0i} \left| \int_0^t v_i(\zeta) d\zeta \right| \pm \frac{F_{0i}^2}{2\gamma_{31i} \mathcal{G}_{0i}} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \left[ \gamma_{31i} \mathcal{G}_{0i} \left( \int_0^t v_i(\zeta) d\zeta \right)^2 - F_{0i} \left| \int_0^t v_i(\zeta) d\zeta \right| + \frac{F_{0i}^2}{2\gamma_{31i} \mathcal{G}_{0i}} \right] - \frac{F_{0i}^2}{2\gamma_{31i} \mathcal{G}_{0i}} \geq \\ &\geq -\frac{F_{0i}^2}{2\gamma_{31i} \mathcal{G}_{0i}} = -\eta_{03i}^2, \quad \eta_{03i} = \text{const}, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

В соответствии с [16, 17] для последнего интеграла из (25) можно записать два справедливых выражения:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{t_*} [S_i(u_i(\zeta)) - u_i(\zeta)] v_i(\zeta) d\zeta \right| \leq \eta_{04i}^2, \quad \eta_{04i} = \text{const}, \quad \forall t \in [0, t_*], \\ &\int_{t_*}^t [S_i(u_i(\zeta)) - u_i(\zeta)] v_i(\zeta) d\zeta = 0, \quad \forall t \in [t_*, t], \end{aligned}$$

где  $t_*$  – момент времени, после которого всегда имеет место  $|u_i(t)| \leq S_{0i}$ , что совместно с полученными выше оценками будет гарантировать справедливость интегрального неравенства (24).

Закон управления (18), исходя из выражений (26) – (29), а также с учетом необходимого ограничения уровня выходного сигнала ВФК (в силу его малой инерционности) [23], запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & \left( u_{1i}(t-T) + \gamma_{1i} v_i(t) \tilde{\mathcal{G}}_i(t) \right) + \\ & + \left( \gamma_{21i} \int_0^t \text{sat}(y_{Fi}(\zeta)) v_i(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta + \gamma_{22i} \text{sat}(y_{Fi}(t)) v_i(t) \tilde{\mathcal{G}}_i(t) \right) \text{sat}(y_{Fi}(t)) + \\ & + \gamma_{31i} \int_0^t v_i(\zeta) \tilde{\mathcal{G}}_i(\zeta) d\zeta + \gamma_{32i} v_i(t) \tilde{\mathcal{G}}_i(t), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\tau_i \frac{d\tilde{\mathcal{G}}_i(t)}{dt} + \tilde{\mathcal{G}}_i(t) = \mathcal{G}_i(t), \quad \tilde{\mathcal{G}}_i(0) = 0, \quad \mathcal{G}_i(t) = \begin{cases} 1, & \forall [S_i(u_i(t)) - u_i(t)] v_i(t) \geq 0, \\ \mathcal{G}_{0i}, & \forall [S_i(u_i(t)) - u_i(t)] v_i(t) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, синтезированный нелинейный регулятор (30) обеспечит выполнение в замкнутой системе управления (3) – (10), (12), (17), (18), (21), (30) поставленных вспомогательной (19) и основной (16) целей функционирования.

### Пример работы системы управления

Для иллюстрации работы построенной дискретно-непрерывной системы управления рассмотрим задачу децентрализованного управления коленчатым двухзвенным манипулятором с дистанционно управляемыми звеньями, перемещающимся в вертикальной плоскости. Передаточные коэффици-

енты: 1:220 – для первого нижнего звена и 1:184 – для второго верхнего звена. Параметры манипулятора:  $m_1 = 1.2$  кг;  $m_2 = 0.8$  кг;  $l_1 = 0.35$  м;  $l_2 = 0.31$  м;  $I_1 = 61.25 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_2 = 20.42 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>.

Возмущения действующие на звенья манипулятора опишем следующим образом:  $f_{3i}(t) = 0.1(\sin(\pi t) + 2\sin(2\pi t) + 3\sin(3\pi t))$ ,  $i = 1, 2$ .

Передаточные функции ЗФК (17) и ВФК (12) зададим как

$$W_{Fi}(s) = \left( \frac{0.5s + 1}{0.001s + 1} \right)^2, \quad i = 1, 2.$$

Сформируем требуемые траектории движения звеньев в виде следующих командных сигналов:  $r_1(t) = \sin(2t)$  and  $r_2(t) = \cos(2t)$ , означающих перемещение конечной точки робота по окружности. Ограничения входных сигналов приводов звеньев манипулятора зададим со значениями:  $S_{0i} = 10$  В. Начальные положения звеньев манипулятора примем в виде:  $y_1(0) = 0.5$  и  $y_2(0) = 2$ . На рис. 1 – 3 показаны результаты одного из вычислительных экспериментов, в ходе проведения которых с целью увеличения быстродействия системы управления параметры дискретных локальных контуров управления были подобраны со значениями:

$$\gamma_{11} = 300, \gamma_{211} = 420, h_{221} = 120,$$

$$h_{311} = 330, h_{321} = 400,$$

$$\gamma_{12} = 300, \gamma_{212} = 320, h_{221} = 220,$$

$$h_{311} = 250, h_{321} = 330,$$

$$\delta_{01} = 0.001, \delta_{01} = 0.5,$$

$$\tau_1 = \tau_2 = 25.$$

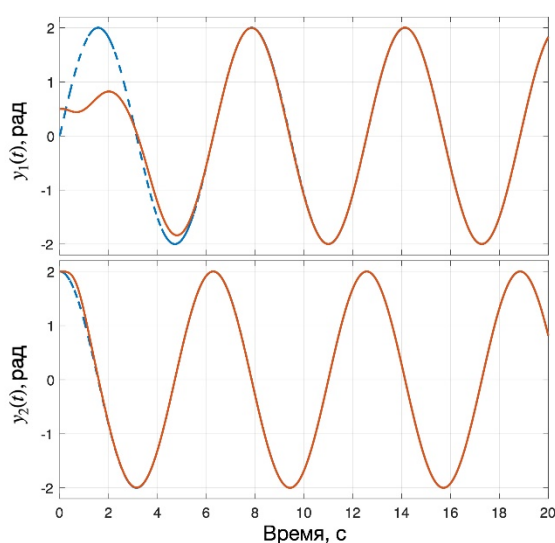


Рис. 1. Требуемые (прерывистые линии) и фактические (сплошные линии) перемещения звеньев манипулятора.

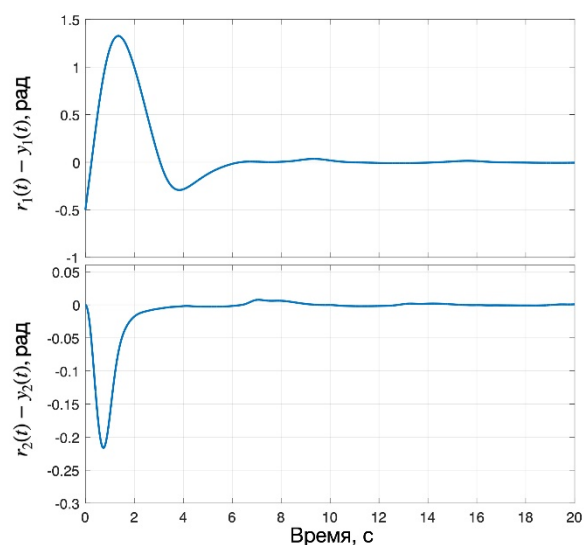


Рис. 2. Ошибки регулирования локальных подсистем.

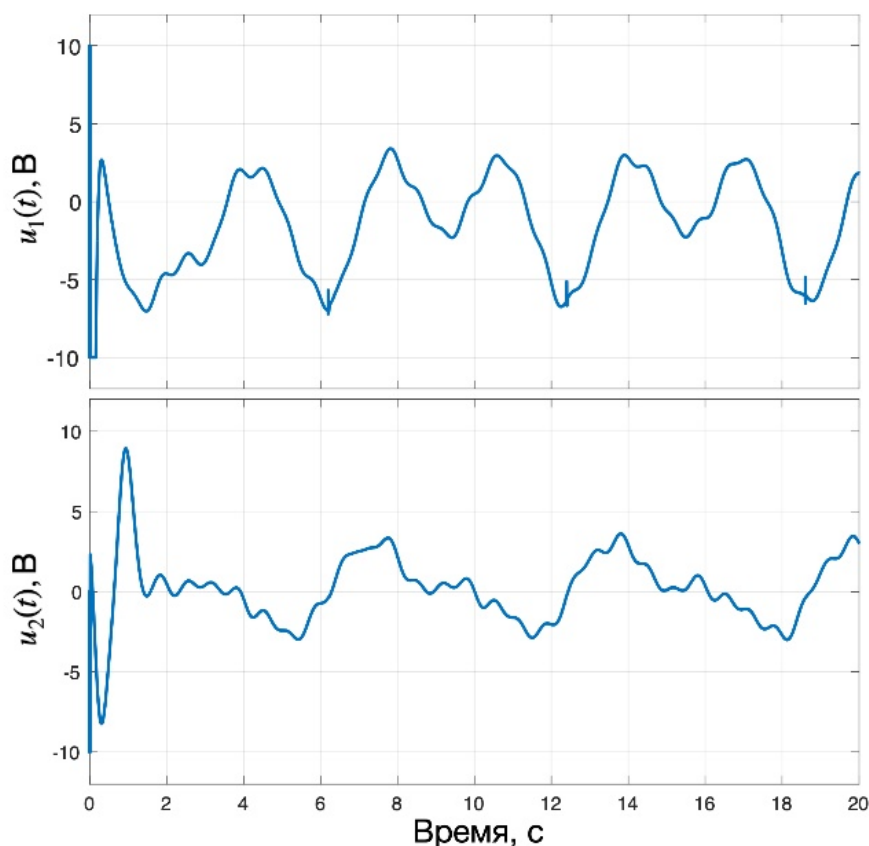


Рис. 3. Управляющие воздействия, подаваемые на двигатели звеньев манипулятора.

Представленные динамические характеристики свидетельствуют о достаточно высоком качестве работы системы управления – при сигналах управления, не имеющих существенных пиковых значений и большого количества переключений (рис. 3), ошибки слежения для каждого из двух звеньев робота в установившемся режиме (спустя примерно 8 секунд с начала функционирования системы) являются практически нулевыми (рис. 2).

### Заключение

В схеме управления с двумя быстродействующими фильтрами-корректорами с использованием критерия гиперустойчивости, условий  $L$ -диссипативности и неявной эталонной модели предложен комбинированный нелинейный периодический регулятор децентрализованной системы управления двухзвенным манипулятором с насыщениями по управляющим воздействиям. С помощью имитационного моделирования показано качество работы разработанной системы управления.

Полученные результаты могут быть использованы при построении контуров управления коленчатыми двухзвенными манипуляторами с оптическими датчиками, а также для построения систем управления манипуляторами с большим количеством степеней свободы и другими типами датчиков.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *He W., Xiao S., Yu S.* Learning Control for a Robotic Manipulator with Input Saturation // 3rd IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Science. – 2013. – Chengdu, China. – P. 74-79.
2. *Purwar S., Kar I.N., Jha A.N.* Adaptive Control of Robot Manipulators Using Fuzzy Logic Systems Under Actuator Constraints // Fuzzy Sets and Systems. – 2005. – No. 152. – P. 651-664.
3. *Spong M.W., Thorp J.S., Kleinwaks J.M.* The Control of Robot Manipulators with Bounded Input // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1986. – Vol. AC-31, No. 6. – P. 483-490.
4. *Dixon W.E., De Queiroz M.S., Zhang F., Dawson D.M.* Tracking Control of Robot Manipulators with Bounded Torque Inputs // Robotica. – 1999. – Vol. 17. – P. 121-129.
5. *Hara S., Yamamoto Y., Omata T., Nakano M.* Repetitive Control System: A New Type Servo System for Periodic Exogenous Signals // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1988. – Vol. 33, No. 7. – P. 659 – 668.
6. *Yao W.-S., Tsai M.-C., Yamamoto Y.* Implementation of Repetitive Controller for Rejection of Position-Based Periodic Disturbances // Control Engineering Practice. – 2013. – Vol. 21, Issue 9. – P. 1226-1237.
7. *Ramos G.A., Costa-Castelló R.* Power Factor Correction and Harmonic Compensation Using Second-Order Odd-Harmonic Repetitive Control // IET Control Theory and Applications. – 2012. – Vol. 6, Issue 11. – P. 1633–1644.
8. *Alsubaie M., Alhajri M., Altowaim T.* Repetitive Control Uncertainty Conditions in State Feedback Solution // Intelligent Control and Automation. – 2018. – No. 9. – P. 95-106.
9. *Ortega R., Herrera A.* A Solution to the Decentralized Adaptive Stabilization Problem // Syst. Contr. Letters. – 1993. – No. 2. – P. 299-306.
10. *Jain S., Khorrami F.* Decentralized Adaptive Control of a Class of Large-Scale Interconnected Nonlinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42, No. 2. – P. 1618- 1624.
11. *Теличенко Д.А.* Гибридная адаптивная система с эталонным упредителем в схемах децентрализованного управления с запаздыванием // Информатика и системы управления. – 2006. – № 1(11). – С. 212-223.
12. *Андреевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Скрытые колебания и возбуждение интегратора при насыщении в контуре управления летальных аппаратов // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. (Электронный ресурс). – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 482-990. (CD-ROM).
13. *Takagi N., Nishida T., Kobayashi T.* A Design of Adaptive Control Systems with Input Saturation // SICE-ICASE International Joint Conference. – 2006. – pp. 984-987.
14. *Takagi N., Oya M., Wang Q., Kobayashi T.* Adaptive control scheme achieving smooth control input in the presence of input saturation // Int. J. Advanced Mechatronic Systems. – 2010. – Vol. 2, No. 4. – P. 225-235.
15. *Takagi N., Sato K., Oya M.* A modified adaptive control scheme in the presence of input saturation // Int. J. Advanced Mechatronic Systems. – 2011. – Vol. 3, No. 3. – P. 168-180.
16. *Еремин Е.Л.* Модификация адаптивной системы для управления одноканальным объектом с входным насыщением // Информатика и системы управления. – 2016. – № 3(49). – С. 119-131.

17. *Еремин Е.Л.* Модификация регулятора робастной системы управления для нелинейного SISO объекта с входным насыщением // Информатика и системы управления. – 2017. – № 1(51). – С. 64-74.
18. *Еремин Е.Л., Шеленок Е.А.* Периодические режимы в схемах нелинейного управления неаффинными динамическими объектами // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019: Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019, Москва, 17–20 июня 2019 года. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. – С. 186-190.
19. *Еремин Е.Л., Шеленок Е.А.* Нелинейно-периодическая система для неаффинного по управлению стационарного объекта // Информатика и системы управления. – 2018. – № 1(55). – С. 130-141.
20. *Еремин Е.Л., Шеленок Е.А.* Система децентрализованного адаптивного управления роботом-манипулятором с входным насыщением // Датчики и системы. – 2017. – № 1(210). – С. 20-27.
21. *Еремин Е.Л., Никифорова Л.В., Шеленок Е.А.* Комбинированная нелинейная система управления с неявным эталоном для априорно неопределенного неаффинного двухканального объекта с запаздываниями по выходу // Информатика и системы управления. – 2020. – № 1(63). – С. 95-108.
22. *Еремин Е.Л.* Комбинированная система с неявным эталоном для класса априорно неопределенных одноканальных объектов неаффинных по управлению на множестве состояний функционирования // Информатика и системы управления. – 2018. – № 3(57). – С. 93-103.
23. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» / пер. с англ. – Институт компьютерных исследований, 2009.

*E-mail:*

*Еремин Евгений Леонидович – ereminel@mail.ru;*

*Никифорова Лариса Владимировна – cherak@inbox.ru;*

*Шеленок Евгений Анатольевич – cidshell@mail.ru.*